2° Μάθημα: 15/10/2020

Εσωτερικό Γινόμενο

Θα συνδέσουμε έναν αριθμό (εν γένει μιγαδικό) με δύο διανύσματα.
Ορίζουμε το "bra" $\langle b|$ και το "ket" $|b\rangle$ ώστε το εσωτερικό γινόμενο να είναι το "bracket" $\langle b|a\rangle$ $(= \vec{b} \cdot \vec{a})$

όχι πραγματικός αλλά μιγαδικός

Ιδιότητες:

1. $\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle^*$, $z^* = \bar{z}$ συζυγής μιγαδικός
Προφανώς αν $|b\rangle \equiv |a\rangle$ τότε $\langle a|a\rangle = \langle a|a\rangle^* \in \mathbb{R}$

ο αριθμός που ισούται με τον συζυγή του είναι πραγματικός

Είναι σημαντικό να τηρούμε τη σειρά των γραμμάτων!

Γενικά $\langle a|b\rangle^* \neq \langle a|b\rangle$. Στην ειδική περίπτωση $\langle a|b\rangle^* = \langle b|a\rangle$ τα γινόμενα λέγονται συμμετρικά.
Δηλ. $\langle b|a\rangle = \langle a|b\rangle$

2. Αν $|c\rangle = \lambda|a\rangle + \kappa|b\rangle$
$\langle d|c\rangle = \lambda\langle d|a\rangle + \kappa\langle d|b\rangle$

3. $\langle a|a\rangle \geq 0$, για εάν ισότητα $|a\rangle = 0$

4. $\|a\| = \sqrt{\langle a|a\rangle}$

5. $\langle a|b\rangle = \langle b|a\rangle = 0$
$|b\rangle$ και $|a\rangle$ ορθογώνια.

Παράδειγμα:

Το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι διανυσματικός χώρος.

Πράγματι

1. Αν $f(x)$ και $g(x)$ συνεχείς $\Rightarrow f(x)+g(x)$ συνεχής
2. $f(x)$ συνεχής στο $[a,b] \Rightarrow \lambda \cdot f(x)$ συνεχής με $\lambda \in \mathbb{R}$
3. Το μηδενικό στοιχείο είναι η μηδενική συνάρτηση
4. Αν $f(x)$ συνεχής στο $[a,b]$ $\exists\, g(x) = -f(x)$ τέτοια ώστε $f(x)+g(x) = f(x) + [-f(x)] = 0$

Εσωτερικό Γινόμενο:

Ο συνήθης ορισμός είναι $\langle g|f\rangle = \int_a^b g^*(x)\, f(x)\, dx$

στο παράδειγμα μας (από πάνω) $= \int_a^b g(x) \cdot f(x)\, dx$

Στο παράδειγμα μας

1. $\langle g|f\rangle = \int_a^b g^* f\, dx = \int_a^b (g f^*)^* dx =$

→ ιδιότητα μιγαδικών $(z^*)^* = z$

$= \left[\int_a^b g f^* dx\right]^* = \left[\int_a^b f^* g\, dx\right]^* = \langle f|g\rangle^*$

→ η πράξη του ολοκλ. δεν μεταβάλλει τον συζυγή.

πρέπει να ελέγχω αν κάθε = ισχύει

(*) μπορεί το αθρ. όλο μαζί να είναι ολοκληρώσιμη αλλά το καθένα αθρ. να μην είναι ολοκληρώσιμο

Παρατήρηση:
Προφανώς όλα απλουστεύονται για πραγματικές συναρτήσεις

2. $|H\rangle = \lambda_1 \cdot |f\rangle + \lambda_2 \cdot |g\rangle$
(στο παραδ. μας $H(x) = \lambda_1 \cdot f(x) + \lambda_2 \cdot g(x)$)

$$\langle F|H\rangle = \lambda_1 \cdot \langle F|f\rangle + \lambda_2 \langle F|g\rangle$$
$$(F \cdot H = \lambda_1 (F \cdot f) + \lambda_2 (F \cdot g))$$

$$\langle F|H\rangle \underset{\text{ορισμός}}{=} \int_a^b F^* \cdot H\,dx = \int_a^b F^*(\lambda_1 f + \lambda_2 g)\,dx =$$

έκανα πράξεις — δεν ισχύει πάντα (*)

$$\overset{\text{έκανα πράξεις}}{=} \int_a^b (\lambda_1 F^* f + \lambda_2 \cdot F^* \cdot g)\,dx \overset{!}{=} \int_a^b \lambda_1 \cdot F^* f\,dx + \int_a^b \lambda_2 \cdot F^* \cdot g\,dx =$$

ολοκλ. αθρ. ισούται με αθρ. ολοκλ.

ιδιότητα με λ

$$= \lambda_1 \int_a^b F^* f\,dx + \lambda_2 \int_a^b F^* g\,dx = \lambda_1 \langle F|f\rangle + \lambda_2 \langle F|g\rangle$$

Σπίτι: να εξετάσω τις υπόλοιπες ιδιότητες

Η ανισότητα Schwarz

Για κάθε ζεύγος διανυσμάτων $|a\rangle$ και $|b\rangle \in S$ ισχύει $\|a\| \cdot \|b\| \geq |\langle b|a\rangle|$

Αποδ.:
προφανώς αν $\langle b|a\rangle = 0$ η ανισότητα είναι προφανής (ιδιότητα 4 από εσωτ. γινό.)
Γενικά $\langle b|a\rangle \neq 0$. Ορίζουμε ένα $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε
$|c\rangle = |a\rangle - \lambda \langle b|a\rangle |b\rangle$ και κατα

Τα γνωστά:

$$\langle c|c\rangle = \langle c|a\rangle - \lambda\langle b|a\rangle\langle c|b\rangle =$$

$\langle c|$ → bra

→ λόγω συμβολισμού bracket

→ λόγω συμβολισμού bracket

Το bra κουμπώνει με οποιοδήποτε ket

$$\langle c|a\rangle$$

$$\boxed{\langle c| = \langle a| - \lambda\langle b|a\rangle\langle b|}$$

$$\langle c|a\rangle = \langle a|a\rangle - \lambda\langle b|a\rangle\langle b|a\rangle$$

$$\langle c|b\rangle = \langle a|b\rangle - \lambda\langle b|a\rangle\langle b|b\rangle$$

→ όχι κ' τόσο σωστή παρένθεση αλλά θα μας βοηθήσει.

$$= \langle a|a\rangle - \lambda\langle b|a\rangle\langle b|a\rangle - \lambda\langle b|a\rangle\left(\langle a|b\rangle - \lambda\langle b|a\rangle\langle b|b\rangle\right)$$

$$= |\langle b|a\rangle|^2\langle b|b\rangle\lambda^2 - 2\lambda|\langle b|a\rangle|^2 + \langle a|a\rangle$$

Θυμάμαι $\langle c|c\rangle \geq 0$

$$\langle a|b\rangle\langle b|a\rangle = \langle b|a\rangle^*\langle b|a\rangle = |\langle b|a\rangle|^2$$

Όμως $|\langle b|a\rangle|^2\langle b|b\rangle > 0$ άρα ζητάμε στη διακρίνουσα του τριωνύμου να ισχύει $\Delta \leq 0$

$$\Delta = \left(-2|\langle b|a\rangle|^2\right)^2 - 4|\langle b|a\rangle|^2\langle b|b\rangle\cdot\langle a|a\rangle =$$

$$= 4|\langle b|a\rangle|^4 - 4|\langle b|a\rangle|^2\langle b|b\rangle\cdot\langle a|a\rangle \leq 0$$

$$\langle a|a\rangle\langle b|b\rangle \geq |\langle b|a\rangle|^2$$

Γραμμική Ανεξαρτησία:

Ορισμός: Τα διανύσματα $\{|x_i>\}_{i=1}^{n}$ καλούνται γραμμ. ανεξάρτητα αν
$\lambda_1 \cdot |x_1> + \lambda_2|x_2> + \ldots + \lambda_n|x_n> = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i|x_i> = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_n = 0$
Σε αντίθετη περίπτωση λέγονται γραμμικώς εξαρτημένα και $\exists \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \neq 0$

Παράδειγμα:

Τα μοναδιαία διανύσματα του $\mathbb{R}^3$.
Έστω $\lambda_1 \hat{i} + \lambda_2 \hat{j} + \lambda_3 \cdot \hat{k} = 0 \Rightarrow$
$\lambda_1 \hat{i}\hat{i} + \lambda_2 \hat{i}\hat{j} + \lambda_3 \hat{k}\hat{i} = 0 \Rightarrow \lambda_1 \hat{i}\hat{i} = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$

σημ: Το ίδιο για λ_2, λ_3.

Παράδειγμα:

Άσκηση: Τα μονώνυμα $1, x, x^2, x^3$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στο $[a,b]$

Ορισμός: Ένας διανυσματικός χώρος λέγεται N-διάστατος $(N < \infty)$ αν υπάρχουν N γραμμ. ανεξ. διανύσματα αλλά οποιαδήποτε $N+1$ διανύσματα είναι γραμμ. εξαρτημένα.

Αν $\forall$ σύστημα διανυσμάτων $\{|x_i>, i=1,2,\ldots,N\}$ μπορώ να βρω τουλ. ένα ακόμη γραμμ. ανεξ. διάνυσμα $\forall N$ τότε ο χώρος είναι απείρων διαστάσεων, N είναι η διάσταση του χώρου.

→ Χρήσιμο για άπειρη διάσταση

Ορισμος: ένα σύνολο N διανυσμάτων $\{|x_i>\}_{i=1}^{N}$ αποτελεί βάση του διαν. χώρου S αν $\forall |x> \in S$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδιασμός των $|x_i>$. Δηλαδή:

$$|x> = \sum_{i=1}^{N} a_i |x_i>$$

Τα a_i είναι οι συνιστώσες του $|x>$ στη βάση $\{|x_i>\}$ και είναι μοναδικές.

Παράδειγμα: Το $\{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$.

Παράδειγμα: Το σύνολο $\{1, x, x^2, x^3\}$ είναι μια βάση στον χώρο των πολυωνύμων με βαθμό ≤ 3

Θεώρημα: Αν N διανύσματα ενός N-διάστατου γραμμικού χώρου S είναι γραμμικά ανεξάρτητα αποτελούν βάση του S. Η βάση καλείται και ορθοκανονική αν $<x_i|x_j> = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i=j \\ 0, & i \neq j \end{cases}$

Διαδικασία Gram-Schmidt:

Η μέθοδος που κατασκευάζουμε ένα σύστημα ορθοκανονικών διανυσμάτων $|e_i>$ ξεκινώντας από ένα σύστημα $\{|x_i>\}_{i=1}^{M}$ λέγεται ορθοκανονικοποίηση Gram-Schmidt.

Έστω $\{|x_i>\}_{i=1}^{\Lambda}$ διανύσματα για χώρο διάστασης N με $\Lambda \geq N$